VI GLAVA

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

§ 1. Krive u prostoru

*Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru **kriva** zadata jednačinom*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} ,$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(t) , \quad y = y(t), \quad z = z(t) ,$$

tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_o *do tačke sa parametrom* t_1 *data formulom*

$$s = \int_{t_o}^{t_1} ds = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Vektor tangente, binormale i normale krive odredjujemo formulama

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \quad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} , \ \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \dddot{\vec{r}} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)$$

i njihove ortove ćemo obeležiti respektivno sa

$$\vec{t}_o, \ \vec{b}_o, \ \vec{n}_o.$$

Tačka M *, vektori* $\vec{t}$ *i* $\vec{n}$ *odredjuju oskulatornu ravan,* M,$\vec{b}$ *i* $\vec{n}$ *normalnu ravan, a* M,$\vec{b}$ *i* $\vec{t}$ *rektifikacionu ravan krive u tački* M *krive.*

Polupečnik krivine R *i krivina* K *su odredjeni relacijama*

$$\frac{1}{K^2} = R^2 = \frac{|\dot{\vec{r}}^2|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \qquad tj. \quad R = \frac{|\vec{t}|^3}{|\vec{b}|} .$$

Poluprečnik torzije, $\pm$T*, je dat formulom:*

$$T = - \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{|\vec{b}|^2}{\dddot{\vec{r}} \cdot \vec{b}} .$$

Torziju ćemo označiti sa $\frac{1}{T}$ *. Ako je u jednačini krive parametar* t *jednak dužini luka* s *, tada je*

$$K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = |\vec{r}\,''|$$

a

$$\frac{1}{T} = \pm \left|\frac{d\vec{b}_o}{ds}\right| .$$

Freneovi obrasci glase:

$$\frac{d\vec{t}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{R} ,$$

$$\frac{d\vec{n}_o}{ds} = - \frac{\vec{t}_o}{R} - \frac{\vec{b}_o}{T} ,$$

$$\frac{d\vec{b}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{T} .$$

Obvojnica familije ravnih krivih F(x,y,a) = 0 *se dobije eliminisanjem parametra* a *iz jednačine*

$$\frac{\partial F(x,y,a)}{\partial a} = 0 , \qquad F(x,y,a) = 0 .$$

1. Pokazati da kriva

$$x = \sin 2\phi$$
$$y = 1 - \cos 2\phi$$
$$z = 2\cos\phi$$

leži na sferi.

Rešenje. Kako je

$$x^2+y^2+z^2 = \sin^2 2\phi+1-2\cos 2\phi+\cos^2 2\phi+4\cos^2\phi =$$

$$= 2-2\cos 2\phi+4\cos^2\phi = 4\sin^2\phi+4\cos^2\phi = 4 ,$$

to sledi da je kriva na centralnoj sferi poluprečnika 2, pošto njene koordinate zadovoljavaju jednačinu te sfere.

2. Naći ugao izmedju tangente na krivu

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$
$$z = b\,t$$

i vektora $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira.

Rešenje. Ako obeležimo sa α ugao izmedju tangente $\vec{t}$ $(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$ i vektota $\vec{r}$ $(a\cos t,\ a\sin t,\ b\,t)$, tada je

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{t}\cdot\vec{r})}{|\vec{t}|\,|\vec{r}|} = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2+b^2t^2}}$$

3. Dokazati da kriva

$$x = e^t\cos t$$
$$y = e^t\sin t$$
$$z = e^t$$

seče izvodnicu konusa na kojem kriva leži, pod konstantnim uglom.

Rešenje. Eliminisanjem parametra t iz jednačine krive dobijamo jednačinu kružnog konusa

$$x^2+y^2=z^2$$

čije je teme u koordinatnom početku, a osa simetrije joj je z - osa.

Ako sa $\vec{t}$ obeležimo vektor tangente na krivu u nekoj tački M, sa $\vec{r}$ vektor položaja tačke M, a sa α ugao izmedju vektora

$\vec{t}$ i $\vec{r}$, (tj. izmedju tangente na krivu i izvodnice konusa koja prolazi kroz tačku dodira) tada je:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{t})}{|\vec{r}|\,|\vec{t}|}$$

Kako je

$$\vec{t} = \vec{t}[e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t\,]$$

$$\vec{r} = \vec{r}(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{3}e^t,\quad |\vec{r}| = \sqrt{2}e^t,\quad (\vec{r}\cdot\vec{t}) = 2e^{2t},$$

to je

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Time je tvrdjenje zadatka dokazano.

4. Kriva koja se naziva loksodroma odredjena je jednačinom

$$\phi = a\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right),$$

gde je θ geografska širina a ϕ dužina tačke na sferi. Dokazati da ona seče meridijane sfere pod uglom α tako da je $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Rešenje. Pošto je loksodroma na nekoj sferi poluprečnika r to je njena jednačina u parametarskom obliku (parametar je θ)

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta,$$

gde je

$$\phi = a\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Kako je $\phi'(\theta) = -\dfrac{a}{\cos\theta}$ to je vektor $\vec{t}$ na loksodromu

$$\vec{t}(-r\sin\theta\cos\phi + ra\sin\phi\ ;\ -r\sin\theta\sin\phi - ra\cos\phi\ ;$$
$$r\cos\theta\ ).$$

Jednačina meridijana sa dužinom ϕ je (ϕ fiksno, θ parametar)

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta\ .$$

Vektor tangente $\vec{t}_1$ na meridijan je

$$\vec{t}_1 = \vec{t}_1(-r\sin\theta\cos\phi;\ -r\sin\theta\sin\phi;\ r\cos\theta)$$

Ugao α izmedju loksodrome i meridijana je ugao izmedju vektora $\vec{t}$ i $\vec{t}_1$ te je:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{t}\cdot\vec{t}_1)}{|\vec{t}||\vec{t}_1|} .$$

Kako je

$$(\vec{t}\cdot\vec{t}_1) = r^2 ; \quad |\vec{t}| = r\sqrt{1+a^2} ; \quad |\vec{t}_1| = r ,$$

to je $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, a $\mathrm{tg}\alpha = a$, što je i trebalo dokazati.

5. Svakoj tački $M(x,y,0)$ ravni XOY možemo pridružiti tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ sfere $x^2+y^2+z^2=az$ koja je odredjena prodorom prave AM (gde je $A(0,0,a)$) kroz sferu. Ovo preslikavanje je uzajamno jednoznačno, izuzev tačke A i zove se stereografska projekcija.

Izraziti koordinate tačke M pomoću koordinata tačke M_1 i dokazati da kriva $r=e^{m\phi}$ položena u ravni XOY gde se polarna osa poklapa sa pozitivnim delom x-ose pri stereografskoj projekciji prelazi u loksodromu.

Rešenje. Kako je $\Delta OMA \sim \Delta OM_1A$ to je

1) $\overline{OM} : \overline{MA} = \overline{OM}_1 : a$, a iz relacije $\Delta AOM_1 \sim \Delta PM_1O$ sledi da je

2) $\overline{OM}_1 : a = z_1 : \overline{OM}_1$. Kako je $\overline{OM}^2 = x^2+y^2$; a $\overline{AM}^2 = x^2+y^2+a^2$ iz 1) i 2) sledi da je

$$z_1 = \frac{a(x^2+y^2)}{x^2+y^2+a^2}$$

Iz relacije

3) $x:x_1 = \overline{AM} : \overline{AM}_1$

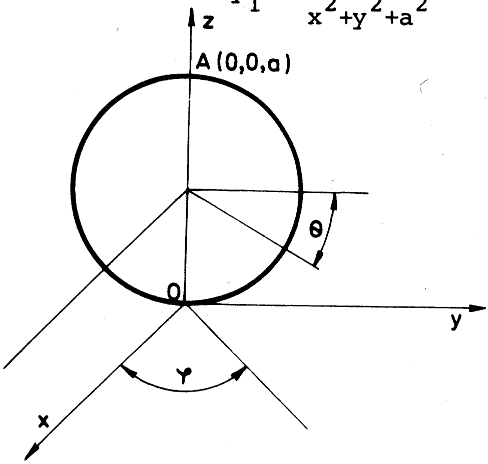
4) $a:(a-z_1) = \overline{AM} : \overline{AM}_1$

sledi da je

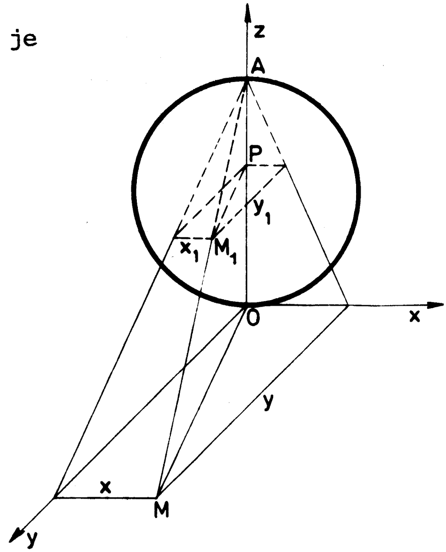
$$x:x_1 = a:(a-z_1) \qquad \text{tj.} \qquad x_1 = \frac{a^2x}{x^2+y^2+z^2}$$

Iz relacije $x:x_1 = y:y_1$ sledi da je

$$y_1 = \frac{a^2 y}{x^2+y^2+a^2} \quad .$$



Sl. 2



Sl. 1

Predjimo na drugi deo zadatka. Kako je tačka M_1 na sferi to je:

$$x_1 = \frac{a}{2}\cos\theta\cos\phi$$

$$y_1 = \frac{a}{2}\cos\theta\sin\phi$$

$$z_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin\theta$$

Pri stereografskoj projekciji krive $r = e^{m\phi}$ je

$$5) \qquad x_1 = \frac{a}{2}\cos\theta\cos\phi = \frac{a^2 x}{x^2+y^2+a^2} \quad .$$

Kako je

$$x = r\cos\phi = e^{m\phi}\cos\phi \ ,$$

a

$$x^2+y^2 = r^2 = e^{2m\phi} \ ,$$

to uvrstivši u 5) gornje vrednosti za x i za x^2+y^2 dobijamo relaciju

$$\frac{a}{2}\cos\theta\cos\phi = \frac{a^2 e^{m\phi}\cos\phi}{e^{2m\phi}+a^2} \ ,$$

tj.

$$e^{2m\phi}\cos\theta - 2ae^{m\phi} + a^2\cos\theta = 0 .$$

Odavde je

$$e^{m\phi}_{1/2} = a\,\frac{1\pm\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\phi_{1/2} = \frac{1}{m}\ln\left[a\,\frac{1\pm 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right] = \frac{1}{m}\ln\left[a\,\frac{(\cos\frac{\theta}{2}\pm\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})}\right]$$

$$\phi_1 = \frac{1}{m}\ln\left[a\,\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}\right] = \frac{1}{m}\ln\left[a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{m}\ln\left[a\,\frac{1-\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}\right] = \frac{1}{m}\ln\left[a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Za a=1 dobijamo

$$\phi_{1/2} = \frac{1}{m}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\theta}{2}\right)$$

a za $a\neq 1$

$$\phi_{1/2} = \frac{1}{m}\ln a + \frac{1}{m}\ln\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\theta}{2}\right)$$

tj. loksodromu obrnutu za ugao $\phi=\frac{1}{m}\ln a$ u pozitivnom smeru.

6) Dokazati da normalne ravni krive

1) $x = a\cos t \quad y = a\sin\alpha\sin t \qquad z = a\cos\alpha\sin t$

prolaze kroz pravu $x=0,\ z+y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$.

Rešenje. Jednačina normalne ravni u nekoj tački krive (x,y,z) je

$$(X-x)\dot{x}+(Y-y)\dot{y}+(Z-z)\dot{z} = 0$$

Za krivu 1) jednačina 2) postaje

$$-(X-a\cos t)a\sin t + (Y-a\sin\alpha\sin t)a\sin\alpha\cos t +$$
$$+ (Z-a\cos\alpha\sin t)a\cos\alpha\cos t = 0,$$

tj.

3) $\quad -\sin t\,X + \sin\alpha\cos t\,Y + \cos\alpha\cos t\,Z = 0.$

Presek normalne ravni krive sa ravni X=0 je

$$Z + Y\mathrm{tg}\alpha = 0$$

U tačkama krive 1) u kojima je $t=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ normalna ravan se poklapa sa ravni X=0, dok u tačkama krive u kojima je

$t=k\pi\,(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ normalna ravan je sama ravan $Z+Y\,\mathrm{tg}\,\alpha=0$, što se lako vidi uvrste li se odgovarajuće vrednosti za t u 3).

7. Dokazati da tangente na krivu

$$1)\qquad \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$$

obrazuju konstantan ugao sa nekim odredjenim pravcem.

Rešenje. Jednačina krive 1) u parametarskom obliku je

$$x = x$$
$$y = \frac{x^2}{3}$$
$$z = \frac{2x^3}{27}\ .$$

Vektor tangente je $\vec{t}(1,\ \frac{2}{3}x,\ \frac{2}{9}x^2)$ a $|\vec{t}| = 1+\frac{2}{9}x^2$,

Posmatrajmo vektor $\vec{a}(1,0,1)$ i obeležimo sa α ugao izmedju $\vec{t}$ i $\vec{a}$. Tada je

$$\cos\alpha = \frac{1+\frac{2}{9}x^2}{\sqrt{2}\,(1+\frac{2}{9}x^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

To znači da svaki vektor tangente krive 1) zaklapa sa vektorom $\vec{a}$ ugao od $\frac{\pi}{4}$.

8. Naći tangentu na krivu

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2-47 = F_1(x,y,z) = 0 \\ x^2+2y^2-z = F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

u tački $M(-2,1,6)$

Rešenje. Vektor tangente $\vec{t}$ na krivu 1) je

$$\vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4x & 6y & 2z \\ 2x & 4y & -1 \end{vmatrix} = (-6y-8yz)\vec{i} + (4x+4xz)\vec{j} + 4xy\vec{k}$$

U tački M je $\vec{t}(-54,-56,-8)$, a jednačina tangente u tački M na krivu 1) je

$$\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$$

9. Naći jedinične vektore tangente, normalne i binormalne za krivu

$$\vec{r} = (\cos t+\sin^2 t)\vec{i}+\sin t(1-\cos t)\vec{j}-\cos t\vec{k}$$

u tački A u kojoj je $t=\frac{\pi}{2}$ i napisati u istoj tački jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni.

Rešenje. Kako je

$$\dot{\vec{r}} = (-\sin t+\sin 2t)\vec{i} + (\cos t-\cos 2t)\vec{j} + \sin t\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-\cos t+2\cos 2t)\vec{i} + (2\sin 2t-\sin t)\vec{j} + \cos t\vec{k}$$

to je u tački A vektor u pravcu tangente

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}_{(t=\frac{\pi}{2})} = -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

a

$$\vec{t}_o = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}).$$

Vektor $\vec{b}$ u pravcu binormalne u tački A je

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}}_{(t=\frac{\pi}{2})} \times \ddot{\vec{r}}_{(t=\frac{\pi}{2})} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k},$$

dok je

$$\vec{b}_o = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})$$

Vektor $\vec{n}$ u pravcu normale je

$$\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k},$$

a

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-5\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k})$$

Kako tačka A ima koordinate (1,1,0) to su jednačine normalne, oskulatorne i reflekcione ravni po redu

$$-x + y + z = 0,$$
$$x - 2y + 3z + 1 = 0,$$
$$-5x - 4y - z + 9 = 0.$$

10. Pokazati da linija

$$x = at^2 + bt + c$$
$$y = a_1t^2 + b_1t + c_1$$
$$z = a_2t^2 + b_2t + c_2$$

leži u jednoj ravni i naći jednačinu te ravni.

Rešenje. Jednačina oskulatorne ravni krive je

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0,$$

koja za krivu 1) postaje

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rastavljanjem na zbir dve determinante jednačina oskulatorne ravni je

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 2at & 2a_1t & 2a_2t \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} X-(at^2+bt+c) & Y-(a_1t^2+b_1t+c_1) & Z-(a_2t^2+b_2t+c_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Prva od gornjih determinanti je nula, pošto su druga i treća vrsta proporcionalne. Drugu determinantu rastavljamo na zbir 4 determinante trećeg reda od kojih su druga i treća jednake nuli, i konačno posle skraćivanja sa 2 jednačina oskulatorne ravni je

$$2)\quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ b & b_1 & b_2 \\ a & a_1 & a_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & c_1 & c_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ a & a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Iz jednačine 2) se vidi da u njoj ne figuriše t, tj. oskulatorne ravni u svim tačkama krive se poklapaju, što znači da je kriva ravna.

11. Naći poluprečnik torzije $|T|$ za krivu

$$\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \operatorname{sh} t\,\vec{k}$$

Rešenje. Kako je

$$\dot{\vec{r}} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \operatorname{ch} t\,\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \operatorname{sh} t\,\vec{k}$$

$$\dddot{\vec{r}} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \operatorname{ch} t\,\vec{k},$$

a

$$[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}] = (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)\vec{i} + (\sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t)\vec{j} + \vec{k},$$

to je

$$[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2 = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = 2\operatorname{ch}^2 t .$$

Iz gornjeg sledi da je

$$\dot{\vec{r}}\,[\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}] = 2\operatorname{ch} t ,$$

a

$$|T| = \left| - \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}[\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}]} \right| = \left| - \operatorname{ch} t \right| = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

12. Pokazati da su kod krive

1) $x = \operatorname{ch} z \quad y = \operatorname{sh} z$

radiusi krive i torzije (R i T) jednaki.

Rešenje. Jednačinu krive 1) možemo napisati u obliku

$$x = \operatorname{ch} t \qquad y = \operatorname{sh} t \qquad z = t$$

Tada je

$$\dot{x} = \operatorname{sh} t \qquad \dot{y} = \operatorname{ch} t \qquad \dot{z} = 1$$

$$\ddot{x} = \operatorname{ch} t \qquad \ddot{y} = \operatorname{sh} t \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\dddot{x} = \operatorname{sh} t \qquad \dddot{y} = \operatorname{ch} t \qquad \dddot{z} = 0 .$$

Neka je $\vec{\dot{r}} = \vec{r}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$, $\vec{\ddot{r}} = \vec{r}(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$ a $\vec{\dddot{r}} = \vec{r}(\dddot{x},\dddot{y},\dddot{z})$ tada je

$$R^2 = \frac{[(\vec{\dot{r}})^2]^3}{[\vec{\dot{r}} \times \vec{\ddot{r}}]^2} \quad , \quad a \qquad |T| = \left| - \frac{[\vec{\dot{r}} \times \vec{\ddot{r}}]^2}{\vec{\dot{r}}[\vec{\ddot{r}} \times \vec{\dddot{r}}]} \right|$$

Iz

$$\vec{\dot{r}}^2 = sh^2t + ch^2t + 1 = 2ch^2t$$

$$[\vec{\dot{r}} \times \vec{\ddot{r}}] = -sht\ \vec{i} + cht\ \vec{j} - \vec{k}$$

$$[\vec{\dot{r}} \times \vec{\ddot{r}}]^2 = sh^2t + ch^2t + 1 = 2ch^2t$$

$$\dot{r}[\ddot{r} \times \dddot{r}] = ch^2t - sh^2t = 1 ,$$

sledi da je

$$R = |T| = 2ch^2t .$$

13. Dokazati da je na krivoj

$$x = achtcost \qquad y = achtsint \qquad z = at$$

odsečak normale (ne glavne) od tačke na krivoj do ose Oz jednak radiusu druge krivine.

Rešenje. Jednačina normalne ravni u tački (x,y,z) je

$$\dot{x}(X-x) + \dot{y}(Y-y) + \dot{z}(Z-z) = 0$$

Presečna tačka ove ravni sa Oz osom je tačka $(0,0,Z_1)$, gde je

$$Z_1 = \frac{\dot{x}x+\dot{y}y+\dot{z}z}{\dot{z}}$$

tj.

$$Z_1 = achtsht + at.$$

Odsečak normale je rastojanje d izmedju tačaka (x,y,z) i $(0,0,Z_1)$.

Kako je

$$\dot{x} = ashtcost - achtsint \qquad \dot{y} = asht + achtcost \qquad \dot{z} = a$$

$$\ddot{x} = -2ashtsint \qquad \ddot{y} = 2ashtcost \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\dddot{x} = -2achtsint-2ashtcost \qquad \dddot{y} = 2achtcost-2ashtsint \qquad \dddot{z} = 0$$

to je

$$\dot{\vec{r}}[\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = 4a^3sh^2t \ ,$$

a

$$[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = -2a^2shtcost\ \vec{i} - 2a^2shtsint\ \vec{j} + 2a^2sh^2t\ \vec{k},$$

$$[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2 = 4a^4sh^2t + 4a^4sh^4t = 4a^4sh^2tch^2t \ .$$

Iz gornjeg sledi da je

$$T = -\frac{[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})} = -\ ach^2t \ ,$$

tj.

$$|T| = ach^2t.$$

Sada se vidi da je $d = |T|$ što je i trebalo dokazati.

14. Po glavnim normalama zavojnice $x=acost$; $y=asint$; $z=bt$ odsečeni su odsečci dužine l. Naći geometrijsko mesto Γ njihovih krajeva.

<u>*Rešenje.*</u> Ako sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$, obeležimo vektore u pravcu tangente, normane i binormale, a sa $\vec{t}_o$, $\vec{n}_o$ i $\vec{b}_o$, ortove tih vektora, tada je

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -asint & acost & b \\ -acost & -asint & 0 \end{vmatrix} = absint\vec{i} - abcost\vec{j} + a^2\vec{k},$$

a

$$\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ absint & -abcost & a^2 \\ -asint & acost & b \end{vmatrix} = -(ab^2+a^3)cost\vec{i} - (ab^2+a^3)sint\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

Kako je

$$|\vec{n}| = \sqrt{(ab^2+a^3)^2(-cost)^2 + (ab^2+a^3)^2(-sint)^2} = ab^2+a^3$$

to je

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\ cost\ \vec{i} - sint\ \vec{j}$$

$$\ell\vec{n}_o = -\ \ell cost\ \vec{i} - \ell sint\ \vec{j}$$

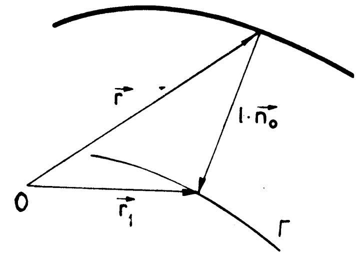
Ako sa $\vec{r}_1$ obeležimo vektor položaja neke tačke (x_1, y_1, z_1) geometrijskog mesta Γ tada je

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \ell \vec{n}_o$$

tj.

$$x_1 = (a-\ell)\cos t$$
$$y_1 = (a-\ell)\sin t$$
$$z_1 = bt$$

što znači da je Γ zavojnica.



Sl. 3

15. Napisati jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni krive:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 11 \\ x^2-y^2+z^2 = 9 \end{cases}$ u tački $M(1,1,3)$.

Rešenje. Diferencirajući jednačine 1) smatrajući x kao nezavisnu promenljivu dobijamo

2) $$xdx+ydy+zdz = 0$$
$$xdx-ydy+zdz = 0$$

Uvrstivši vrednosti za x,y,z dobijamo jednačine

$$dx+dy+3dz = 0$$
$$dx-dy+3dz = 0$$

čija su rešenja $dy=0$; $dz=-\frac{1}{3}dx$. Diferencirajući 2) po x dobijamo

$$(dx)^2 + (dy)^2 + yd^2y + (dz)^2 + zd^2z = 0$$
$$(dx)^2 - (dy)^2 - yd^2y + (dz)^2 + zd^2z = 0$$

Uvrstivši vrednosti za x,y,z,dy i dz dobijamo

$$\frac{10}{9}(dx)^2 + d^2y + 3d^2z = 0$$
$$\frac{10}{9}(dx)^2 - d^2y + 3d^2z = 0$$

čija su rešenja $d^2y = 0$; $d^2z = -\frac{10}{27}(dx)^2$.

Jednačina normalne ravni u datoj tački M odredjenog vektorom položaja $\vec{r}_o(1,1,3)$ je $(\vec{r}-\vec{r}_o)d\vec{r}_o = 0$ gde je $d\vec{r}_o = d\vec{r}_o(dx, o, -\frac{1}{3}dx)$

te je jednačina normalne ravni

$$x-1+(z-3)\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \quad \text{tj.} \quad x-\frac{1}{3}z = 0 .$$

Jednačina oskulatorne ravni

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ dx & 0 & -\frac{1}{3}dx \\ 0 & 0 & -\frac{10}{27}(dx)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

te je jednačina oskulatorne ravni

$$y - 1 = 0.$$

Vektor normale $\vec{n}$ krive 1) u tački M dobijamo kao vektorski proizvod vektora

$\vec{b} = \vec{b}(0,1,0)$ i vektora $\vec{t}(1,0,-\frac{1}{3})$ tj. $\vec{n}=\vec{n}(-\frac{1}{3},0,-1)$ te je jednačina rektifikacione ravni:

$$-\frac{1}{3}(x-1)-(z-3) = 0$$

ili

$$x + 3z - 10 = 0.$$

16. Odrediti funkciju f(t) iz uslova da binormala krive

$$1) \qquad \vec{r} = \vec{r}(t,\sin t,f(t))$$

bude paralelna ravni YOZ, da kriva 1) prolazi kroz tačku $A(\frac{\pi}{2},1,1)$ i da u toj tački ima vektor tangente paralelan vektoru $\vec{t}(1,0,1)$.

Rešenje. Kako je vektor binormale $\vec{b}$ paralelan vektoru $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ to iz

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,(1,\cos t,f')$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,(0,-\sin t,f'')$$

a

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (f''\cos t + f'\sin t,-f'', -\sin t)$$

sledi da mora biti prva koordinata vektora $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ jednaka nuli, da bi vektor $\vec{b}$ bio paralelan ravni YOZ; tj.

$$f''\cos t + f'\sin t = 0.$$

Odavde je

$$\frac{f'}{f''} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

tj.

$$\ln f' = \ln\frac{C}{\sin t},$$

a

$$f = C\int\frac{dt}{\sin t} = C\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C_1$$

Kriva 1) sada ima oblik

2) $\vec{r} = \vec{r}\,(t, \sin t, C\ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}) + C_1)$

Iz uslova da kriva 2) prolazi kroz tačku A i u njoj ima vektor tangente paralelan vektoru $\vec{t}$ dobijamo da je

$$C_1 = 1, \quad C = 1$$

a kriva 2) postaje

3) $\vec{r} = \vec{r}\,(t, \sin t, \ln(\operatorname{tg}\frac{t}{2}) + 1)$

17. Naći obvojnicu familije parabola

1) $y = x^2 + ax + b$

čija se temena nalaze na pravoj $y=x$.

<u>*Rešenje.*</u> Ako sa T obeležimo teme parabole 1) tada je

$$x_T = -\frac{a}{2}; \quad y_T = -\frac{a^2}{4} + b.$$

Kako T leži na pravoj $y=x$ to je $x_T=y_T$ odakle sledi da je

$$b = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right).$$

Sada 1) postaje

2) $y = x^2 + ax + \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right)$

Parcijalni izvod 2) po a je

3) $x + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

Eliminisanjem parametra a iz 2) i 3) dobijamo pravu

4) $y = x - \frac{1}{2}$

koja je obvojnica familije parabola 2).

18. Naći obvojnicu familije elipsi

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ za koje je 2) $a^2 + b^2 = 1.$

Rešenje. Iz 1) i 2) dobijamo jednačinu familije elipsi

3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1-a^2} = 1$$

Parcijalni izvod 3) po a je

$$\frac{-2ax^2}{a^4} + \frac{2ay^2}{(1-a^2)^2} = 0,$$

tj.

$$a^4(y^2-x^2) + 2a^2x^2 - x^2 = 0.$$

Rešenja ove jednačine su

4) $$a_1^2 = \frac{x}{y+x},$$

5) $$a_2^2 = \frac{x}{x-y}.$$

Eliminišući a iz 3) i 4) dobijamo jednačinu

6) $$(x+y)^2 = 1 \quad \text{tj.}$$

7) $$x+y=1$$

$$x+y=-1.$$

Eliminišući a iz 3) i 5) dobijamo jednačinu

$$(x-y)^2 = 1.$$

tj.

8) $$x-y=1$$

9) $$x-y=-1.$$

Obvojnica familije elipsi 3) je kvadrat. Jednačine strane kvadrata su 6), 7), 8) i 9).

19. Ako oskulatorne ravni krive uvek prolaze kroz jednu stalnu tačku prostora, dokazati da je kriva ravna.

Rešenje. Ako je $\vec{r}_1$ vektor položaja fiksne tačke kroz koju prolaze sve oskulatorne ravni krive, tada je jednačina oskulatorne ravni u proizvoljnoj tački krive odredjena vektorom položaja $\vec{r}(t)$ data sa

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)) = 0,$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja proizvoljne tačke ravni. Kako i $\vec{r}(t)$ leži u oskulatornoj ravni, to je

1) $\quad (\vec{r}(t) - \vec{r}_1)\,[\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)] = 0.$

Koristeći pravila za izvod skalarnog i vektorskog proizvoda vektorskih funkcija skalarne promenljive:

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_1\cdot\frac{d\vec{r}_2}{dt}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right] = \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2\right] + \left[\vec{r}_1\times\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right]$$

imamo:

$$\dot{\vec{r}}\,[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}] + (\vec{r}-\vec{r}_1)\,[\ddot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}] + (\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot[\dot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}] = 0.$$

Kako su prva dva sabirka u gornjoj jednačini jednaki nuli, to je

2) $\quad (\vec{r}-\vec{r}_1)\,[\dot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}] = 0.$

Iz jednačine 1) imamo da su vektori $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$ komplanarni, tj. leže u nekoj ravni α_t, a iz 2) izlazi da i $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}$, $\dddot{\vec{r}}$ pripadaju α_t, tj. u svakoj tački $\vec{r}(t)$ krive, vektori $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$ i $\dddot{\vec{r}}$ pripadaju istoj ravni, što znači da je $[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]\cdot\dddot{\vec{r}} = 0$. Odavde sledi da je torzija ($\frac{1}{T}$) jednaka nuli u svakoj tački krive, tj. kriva je ravna, jer je

$$\frac{1}{T} = \frac{\dddot{\vec{r}}\cdot[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]}{[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2}$$

20. Izvesti formulu za krivinu ravne krive zadate jednačinom

$$y = y(x).$$

Rešenje. Uzimajući x za parametar, njena vektorska jednačina je oblika

$$\vec{r} = (x, y(x), 0)\ .$$

Tada je

$$\dot{\vec{r}} = (1, y'(x), 0),$$
$$\ddot{\vec{r}} = (0, y''(x), 0).$$

Kako je

$$(\dot{\vec{r}})^2 = 1+y'^2(x), \qquad [(\dot{\vec{r}})^2]^3 = [1+y'^2(x)]^3,$$

a

$$[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}] = (0,0,y''(x)), \qquad [\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2 = [y''(x)]^2\ ,$$

to je

$$K = \frac{\sqrt{[\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}]^2}}{(\dot{\vec{r}}^2)^{3/2}} = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|$$

Z a d a c i z a v e ž b u

1. Naći geometrijsko mesto sredina normala elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ uperenih prema unutrašnjosti elipse.

$[(b^2x^2+a^2y^2)^2(a^6y^2+b^6x^2) = a^4b^4(a^2-b^2)^2\ x^2y^2]$

2. Kakvu krivu predstavlja jednačina $x=t^2-2t+3$; $y=t^2-2t+1$ (deo prave $x-y=2$ gde je $x \geq 2$).

3. Dokazati da se jednačina strofoide $(2a-x)y^2=x(x-a)^2$ može napisati i u parametarskom obliku

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}\ ;\quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}$$

4. Naći rastojanje od koordinatnog početka do tangente na krivu $x^2y=a^3$ u tački sa apscisom x_o.

$$\left(d = \frac{3a^2x_o}{\sqrt{x_o^6 + 4a^6}} \right)$$

5. Dokazati da su sve normale na krivu $x=a(\cos t+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$ podjednako udaljeni od koordinatnog početka.

6. Dokazati da površina trapeza obrazovanog sa tangentom na krivu $3axy=x^3+2a^3$, ordinatom tačke dodira i koordinatnim osama ne zavisi od izbora tačke dodira.

7. Dokazati da se linije $(2a-x)y^2=x^3$ i $(x^2+y^2)^2 = b^2(2x^2+y^2)$ seku pod pravim uglom.

8. Naći geometrijsko mesto temena pravog ugla čije strane tangiraju krivu $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$; ($x^2+y^2=a^2-b^2$, $a^2>b^2$; za $a^2<b^2$ ne postoji takav ugao).

9. Naći obvojnicu krugova sa centrom na hiperboli $xy=a^2$

koje tangiraju Ox osu.

$$\left[1)\ y=0;\quad 2)\ x=a\,\frac{\sigma^5+3\sigma}{\sigma^4+1}\ ,\ y=a\,\frac{2\sigma^3}{\sigma^4+1}\ ,\quad \sigma=\pm 1\right].$$

10. Naći kosinuse ugla koji gradi tangenta na krivu $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=mx$ sa koordinatnim osama.

$$(M\cos\alpha = z_1;\ M\cos\beta = mz_1;\quad M\cos\gamma = -(my_1+x_1);$$

$$M^2 = (m^2+1)z_1^2 + (my_1+x_1)^2)$$

11. Naći radius krivine za $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$; $z = a\cos 2t$.

$$(\ R = \frac{25}{6}\,a\sin 2t\ )\ .$$

§ 2. Površi u prostoru

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ *na površ dat sa*

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'],\quad \vec{r}_u' = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\ ,\quad \vec{r}_v' = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_o *odredjenoj vektorom položaja* $\vec{r}_o$ *je*

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)\vec{n}_{M_o} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ *ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametra* a *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ *ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametara* a *i* b *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.

1. Naći jednačinu tangentne ravni i normale na površ

1) $f(x,y,z) = x^2-4y^2+2z^2-6 = 0$

u tački $A(2,2,3)$.

Rešenje. Iz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -8y, \frac{\partial f}{\partial z} = 4z,$$

sledi da je vektor $\vec{n}$ normalan na površ 1) u tački A

$$\vec{n} = \vec{n}(4, -16, 12).$$

Jednačina tangentne ravni je

$$(x-2)-4(y-2)+3(z-3) = 0, \text{ tj. } x-4y+3z-3 = 0,$$

a jednačina normale

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{3}.$$

2. Dokazati da ravni koje tangiraju površ

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$

odsecaju na koordinatnim osama odsečke čiji je zbir stalan.

Rešenje. Jednačina tangentne ravni u tački (x,y,z) površi 1) je

2) $$\frac{1}{\sqrt{x}}(X-x) + \frac{1}{\sqrt{y}}(Y-y) + \frac{1}{\sqrt{z}}(Z-z) = 0$$

Ako sa a, b i c obeležimo odsečke koje ravan 2) odseca na x,y i z osi, tada je:

$$a = x + \sqrt{x}\,(\sqrt{y}+\sqrt{z})$$
$$b = y + \sqrt{y}\,(\sqrt{x}+\sqrt{z})$$
$$c = z + \sqrt{z}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})\ ,$$

a

$$a+b+c = x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} = (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = 0\ .$$

3. Na površ

1) $xy + z^2 + xz = 1$

postaviti tangentnu ravan paralelnu ravni

2) $x + 2z - y = 0.$

Rešenje. Ako je tangentna ravan površi 1) u tački M (x_o,y_o,z_o) paralelna ravni 2) onda vektori $\vec{n}_1(y_o+z_o\ x_o,2z_o+x_o)$ i $\vec{n}_2(1,-1,2)$ moraju biti kolinearni, te je

$$\frac{y_o+z_o}{1} = \frac{x_o}{-1} = \frac{2z_o+x_o}{2} = t\ ,$$

tj.

$$x_o = -t$$
$$y_o = -\frac{1}{2}t$$

3) $$z_0 = \frac{3}{2}t\ .$$

Kako je tačka M na površi 1) to je

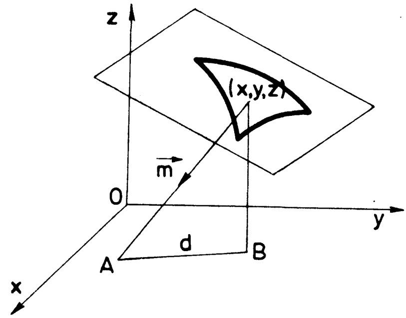
4) $\quad x_o y_o + z_o^2 + x_o z_o = 1$.

Iz 3) i 4) sledi da je

$$\frac{1}{2}\, t^2 + \frac{9}{4}\, t^2 - \frac{3}{2}\, t^2 = 1$$

Rešenja gornje jednačine su

$$t_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad t_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$



Sl. 4

Postoje dve tačke M_1 i M_2 na površi 1) u kojima je tangentna ravan paralelna ravni 2) a to su

$$M_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) ; \quad M_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) .$$

Jednačine tangentnih ravni u tim tačkama su

$$x-y+2z-\sqrt{5} = 0 \ ; \quad x-y+2z+\sqrt{5} = 0$$

4. Odsečak normale na površ

$$1) \qquad \begin{aligned} x &= v\cos u - \phi(u)\cos u + \phi'(u)\sin u \\ y &= v\sin u - \phi(u)\sin u - \phi'(u)\cos u \\ z &= \sqrt{2v} \end{aligned}$$

koji se nalazi izmedju površi i ravni XOY projektuje se na ravan XOY. Pokazati da je veličina projekcije d stalna (sl. 4)

Rešenje. Ako sa $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ obeležimo vektor normale na površ 1) u nekoj tački (u,v) tada je

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ [-v+\phi(u)+\phi''(u)]\sin u & -[-v+\phi(u)+\phi''(u)]\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & \frac{1}{\sqrt{2v}} \end{vmatrix} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k},$$

gde je

$$2) \quad n_1 = -\frac{1}{z}\,[-v+\phi(u)+\phi''(u)]\cos u$$

$$n_2 = [-v+\phi(u)+\phi''(u)]\sin u \left(-\frac{1}{z}\right)$$

$$n_3 = [-v + \phi(u) + \phi''(u)]$$

Jednačina prave normalne na površ 1) u tački (u,v) je

$$3) \qquad \frac{X-x}{n_1} - \frac{Y-y}{n_2} = \frac{Z-z}{n_3}.$$

Prodor prave 3) kroz ravan XOY je tačka $A(x - \frac{n_1}{n_3}z,\ y - \frac{n_2}{n_3}z, o)$, tj. zbog 2) je $A(x + \cos u, y + \sin u, o)$.

Projekcija tačke (x,y,z) na ravan XOY je tačka $B(x,y,o)$. Veličina projekcije d je $\overline{AB}$ tj.

$$d = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 1.$$

5. Naći geometrijsko mesto Γ projekcija centra elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ na tangentne ravni.

Rešenje. Jednačina tangentne ravni na elipsoid u tački (x,y,z) je

$$1. \quad \frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0,$$

dok je jednačina normalne prave na tangentnu ravan 1) kroz koordinatni početak

$$2. \quad \frac{a^2 X}{x} = \frac{b^2 Y}{y} = \frac{c^2 Z}{z} = t$$

Prodormu tačku M prave 2) kroz ravan 1) (tj. projekciju centra elipsoida na tangentnu ravan) dobijamo za $t = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, te su koordinate tačke M

$$X = \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}, \quad Y = \frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}, \quad Z = \frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Kako je

3. $$X^2+Y^2+Z^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

a

4. $$(aX)^2+(bY)^2+(cZ)^2 = \frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2},$$

jer je (x,y,z) tačka na elipsoidu, te je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

to iz 3) i 4) sledi da je

$$(X^2+Y^2+Z^2) = a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2$$

traženo geometrijsko mesto Γ.

6. Na površi

1). $\vec{r}(u,v) = aucosv\vec{i} + businv\vec{j} + u^2(acos^2v+bsin^2v)\vec{k}$

naći krivu u čijim tačkama tangentne ravni na površ odsecaju jednake otsečke na y i z osi, i pokazati da je to ravna kriva.

Rešenje. Kako je

$$\vec{r}_u' = acosv\vec{i} + bsinv\vec{j} + 2u(acos^2v+bsin^2v)\vec{k}$$

$$\vec{r}_v' = -ausinv\vec{i} + bucosv\vec{j} + 2u^2(-acos\,v\,sinv + b\,sin\,v\,cos\,v)\vec{k}$$

to je vektor $\vec{n}$ normalan na površ u tački (u, v).

2) $\vec{n} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = -2abu^2cosv\vec{i} - 2abu^2sinv\vec{j} + abu\vec{k}$,

a jednačina tangentne ravni glasi

$$-2ucosv(x-aucosv)-2usinv(y-businv) + \\ + z-u^2(acos^2v+bsin^2v) = 0,$$

odnosno

3) $$\frac{2u(cosv)x}{u^2(acos^2v+bsin^2v)} + \frac{2u\,(sinv)y}{u^2(acos^2v+bsin^2v)} - \frac{z}{u^2(acos^2v+bsin^2v)} = 1$$

Da bi ravan 3) odsecala jednake odsečke na y i z osi mora biti

$$2u \sin v = -1$$

tj.

$$u = -\frac{1}{2\sin v} \qquad v \neq k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots).$$

Iz gornjeg sledi da je jednačina tražene krive

$$\vec{r}(v) = -\frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,v\,\vec{i} - \frac{b}{2}\,\vec{j} + \frac{1}{4}\,(a\,\mathrm{ctg}^2 v + b)\vec{k},$$

odakle se vidi da se ona nalazi u ravni $y = -\frac{b}{2}$.

7. Pokazati da sve tangentne ravni na površi

1) $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$

prolaze kroz stalnu tačku.

Rešenje. Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,f'\left(\frac{y}{x}\right) \; ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

to je jednačina tangentne ravni kroz neku tačku $M(x,y,z)$ površi 1).

2) $$\left[f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,f'\left(\frac{y}{x}\right)\right](X-x) + f'\left(\frac{y}{x}\right)(Y-y) - (Z-z) = 0$$

Kako je $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ to 2) postaje

3) $$\left[f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]X + f'\left(\frac{y}{x}\right)Y - Z = 0$$

Sve tangentne ravni 3) prolaze kroz koordinatni početak.

8. Pokazati da su površi

1) $$x^2 + y^2 + z^2 = x$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$

ortogonalne.

Rešenje. Ovo su dve sfere poluprečnika $\frac{1}{2}$ sa centrom u tački $A(\frac{1}{2},0,0)$, odnosno $b(0,\frac{1}{2},0)$, što se lako vidi ako se jednačine 1) napišu u obliku

$$2)\qquad \begin{aligned} &(x-\tfrac{1}{2})^2+y^2+z^2=\tfrac{1}{4}\\ &x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+z^2=\tfrac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Vektori normala na površ 1) u nekoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ su

$$\vec{n}_1(2x-1,2y,2z)$$

i

$$\vec{n}_2(2x,2y-1,2z)$$

Pokazaćemo da su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ normalni,

$$(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2) = 4x^2-2x+4y^2-2y+4z^2 =$$

$$= 2(x^2-x+y^2+z^2)+2(x^2+y^2-y+z^2) = 0,$$

jer tačka M leži na presečnoj liniji sfera, te njene koordinate zadovoljavaju jednačine 1). Iz gornjeg sledi da su površi 1) ortogonalne.

9. Dokazati ortogonalnost sledećih površi

1) $xy = az^2$,

2) $x^2+y^2+z^2 = b$,

3) $z^2+2x^2 = c(z^2+2y^2)$.

Rešenje. Ako sa $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ i $\vec{n}_3$ obeležimo vektore normala na površi 1), 2) i 3) u njihovoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ tada je

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_1(y,x,-2az)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_2(x,y,z)$$

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_3(2x,-2cy,z-cz)$$

Pokazaćemo da su vektori $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ i $\vec{n}_3$ uzajamno normalni što znači da su i površi ortogonalne.

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = xy + xy - 2az^2 = 2(xy-az^2) = 0,$$

jer tačka M leži na površi 1),

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3) = 2xy - 2cxy - 2az^2 + 2acz^2 = 2(1-c)(xy-az^2) = 0$$

jer tačka M leži na površi 1),

$$(\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3) = 2x^2 - 2cy^2 + z^2 - cz^2 = 0 ,$$

jer tačka M leži na površi 3).

S tim je tvrdjenje zadatka dokazano.

10. Naći obvojnu površ familije sferi

1) $\quad (x-a)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Rešenje. Iz $-2(x-a) = 0$ dobijamo da je $a = x$. Zamenjujući ovo u 1) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

To je kružni cilindar čije su izvodnice paralelne x osi.

11. Naći obvojnu površ familije sferi

1) $\quad (x-pa)^2 + (y-qa)^2 + (z-ra)^2 = s^2a^2 ,$

gde je a parametar.

Rešenje. Parcijalni izvod 1) po a je

2) $\quad -p(x-pa)-q(y-qa)-r(z-ra) = s^2a$

odakle je

$$a = \frac{px+qy+rz}{p^2+q^2+r^2-s^2}$$

Ako uvedemo smenu

$$px + qy + rz = \alpha; \quad p^2 + q^2 + r^2 - s^2 = \beta \quad (\beta \neq 0)$$

tada je $a = \frac{\alpha}{\beta}$, a zamenjujući ovu vrednost od a u 1) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$(\beta x-p\alpha)^2 + (\beta y-q\alpha)^2 + (\beta z-r\alpha)^2 = s^2\alpha^2$$

12. Naći obvojnu površ ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2}, 0, 0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1.

Rešenje. Kako ni jedna od ravni koje zadovoljavaju uslov zadatka nije paralelna x osi, to u jednačini ravni kroz datu tačku $(\sqrt{2},0,0)$

$$1) \qquad A(x-\sqrt{2}) + By + Cz = 0$$

A je uvek različito od nule, i može se uzeti da je njena vrednost 1, pa 1) postaje

$$2) \qquad x + By + Cz = \sqrt{2}$$

Iz uslova da je rastojanje ovih ravni od koordinatnog početka 1, sledi veza

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}} = 1, \text{ tj.} \quad B = \pm\sqrt{1 - C^2}, \qquad |C| < 1 .$$

Vrativši gornju vrednost za B u 2) dobijamo konačni oblik jednačine ravni koje zadovoljavaju uslov zadatka (sa parametrom C)

$$3) \qquad x \pm \sqrt{1 - C^2}\,y + Cz = \sqrt{2}.$$

Parcijalni izvod 3) po C je

$$4) \qquad \frac{-C}{\pm\sqrt{1 - C^2}}\,y + z = 0 \quad \text{ili} \quad C^2(y^2+z^2) = z^2.$$

Iz 4) sledi da je

$$5) \qquad C = \frac{z}{\pm\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \sqrt{1 - C^2} = \frac{\pm y}{\sqrt{y^2 + z^2}} .$$

Iz 5) i 3) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$x - \sqrt{2} \pm \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} = 0 \quad \text{ili} \quad (x - \sqrt{2})^2 = y^2 + z^2$$

Ovo je jednačina konusa čije je teme u tački $(\sqrt{2},0,0)$ a osa simetrije joj je x osa.

13. Naći obvojnu površ familije elipsi

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

pri uslovu $a+b+c=1$.

Rešenje. Pri gornjem uslovu 1) se pretvara u

2) $$\frac{x^2}{(1-b-c)^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Parcijalni izvodi od 2) po b i c su

3) $$\frac{x^2}{(1-b-c)^3} - \frac{y^2}{b^3} = 0$$

4) $$\frac{x^2}{(1-b-c)^3} - \frac{z^2}{c^3} = 0 .$$

Eliminisanjem parametra b i c iz 2), 3) i 4) dobijamo jednačinu površi.

Iz 3) i 4) sledi da je

$$\frac{y^2}{b^3} = \frac{z^2}{c^3} \quad \text{tj.} \quad c = \left[\frac{z}{y}\right]^{\frac{2}{3}} b$$

Uvrstimo li c iz 5) u 4) dobijamo da je

$$\frac{x^2}{\left[1-b-\left|\frac{z}{y}\right|^{2/3}b\right]^3} = \frac{y^2}{b^3} \quad \text{tj.} \quad \frac{x^{2/3}}{1-b-\left|\frac{z}{y}\right|^{2/3}b} = \frac{y^{2/3}}{b}$$

a odatle je

(6) $$b = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}} .$$

Iz 5) i 6) sledi da je

(7) $$c = \frac{z^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}} .$$

Uvrstivši vrednosti od b i c iz 6) i 7) u 2) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1.$$

14. Napisati jednačine rotacionih površi koje se dobijaju obrtanjem:

a) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko OX ose

b) kruga $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ oko OY ose

c) parabole $z^2 = 2px$ oko OZ ose

d) hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko OY ose

Rešenje. Jednačine rotacionih površi su

a) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

(u jednačini elipse y zamenimo sa $\sqrt{y^2+z^2}$)

b) $$(\sqrt{x^2+z^2}-a)^2 + y^2 = R^2$$

(u jednačini kruga x zamenimo sa $\sqrt{x^2+z^2}$)

c) $$z^2 = 2p\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ili} \quad z^4 = 4p^2(x^2+y^2)$$

(u jednačini parabole x zamenimo sa $\sqrt{x^2+y^2}$)

d) $$\frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(u jednačini hiperbole x zamenimo $\sqrt{x^2+z^2}$)

15. Odrediti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x-a)^2 = -k^2(y-b)$; $z = c$ a generatrise su paralelne pravoj $x = mz$; $y = nz$.

Rešenje. Ako je tačka (ξ,η,ζ) na direktrisi tada je

1) $(\xi-a)^2 = -k^2(\eta-b)$

2) $\zeta = c$

Jednačinu prave možemo napisati u obliku:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{1} \quad .$$

Tada je jednačina generatrise kroz tačku (ξ,η,ζ)

$$\frac{x-\xi}{m} = \frac{y-\eta}{n} = \frac{z-\zeta}{1} = t$$

(gde je (x,y,z) tačka na cilindričnoj površi) tj.

3) $\zeta = x - mt$

4) $\eta = y - nt$

5) $\zeta = z - t$.

Eliminišući parametar ξ,η,ζ i t 1), 2), 3), 4) i 5) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Iz 2) i 5) sledi da je

6) $t = z - c$.

Uvrstivši t iz 6) i u 3) i 4) dobijamo da je

7) $\xi = x - m(z-c)$

8) $\eta = y - n(z-c)$.

Uvrstivši iz 7) i 8) vrednosti za ξ i η u 1) dobijamo jednačinu cilindrične površi

$$[x - a - m(z-c)]^2 + k^2[y - b - n(z-c)] = 0 \quad .$$

16. Naći jednačinu cilindrične površi čije su generatrise paralelne pravoj $x = y = z$ i tangiraju elipsoid $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

Rešenje. Ako je tačka $A(\xi,\eta,\zeta)$ istovremeno na elipsoidu i na cilindru onda je sa jedne strane

1) $$\xi^2 + 4\eta^2 + 9\zeta^2 = 1,$$

a sa druge strane je vektor a(1,1,1) u tangentnoj ravni elipsoida u tački $A(\xi,\eta,\zeta)$, gde je vektor normale tangentne ravni $\vec{n} = \vec{n}(\xi,4\eta,9\zeta)$. Iz uslova normalnosti $\vec{a}$ i $\vec{n}$ izlazi da je

2) $\xi + 4\eta + 9\zeta = 0.$

Jednačina generatrise kroz tačku A je

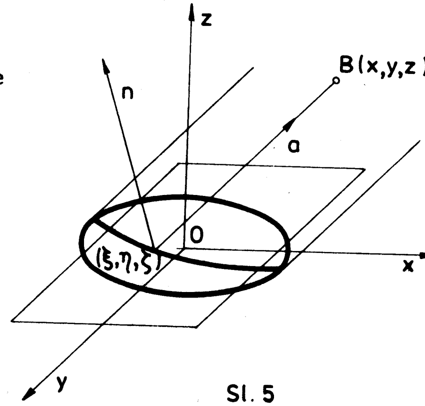
$$\frac{x-\xi}{1} = \frac{y-\eta}{1} = \frac{z-\zeta}{1} = t,$$

tj.

3) $\xi = x - t$

$\eta = y - t$

$\zeta = z - t$,



Sl. 5

gde je B(x,y,z) tačka na cilindru. Eliminišući ξ, η, ζ i t iz 1), 2) i 3) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Zamenimo vrednosti od ξ, η i ζ iz 3) u 2) i dobijamo

$$-14t + x + 4y + 9z = 0$$

tj.

$$t = \frac{x + 4y + 9z}{14} .$$

Ovako dobiveno t vratimo u 3) a zatim vrednosti ξ, η i ζ iz 3) uvrštavamo u 1) i dobijamo

$$(13x-4y-9z)^2 + 4(-x+10y-9z)^2 + 9(-x-4y+5z)^2 = 14^2$$

tj. posle kvadriranja i delenja cele jednačine sa 14 dobijamo jednačinu cilindrične površi.

$$13x^2 + 40y^2 + 45z^2 - 8xy - 18xz - 72yz - 14 = 0 .$$

17. Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački (0,0,-c) a direktrisa joj je leminskata z=0; $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Rešenje. Ako je $A(\xi, \eta, \zeta)$ proizvoljna tačka na direktrisi, tada je

1) $(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2(\xi^2 - \eta^2)$

i

2) $\xi = 0$.

Jednačina generatrise koja spaja (0,0,-c) sa $A(\xi, \eta, \zeta)$ je

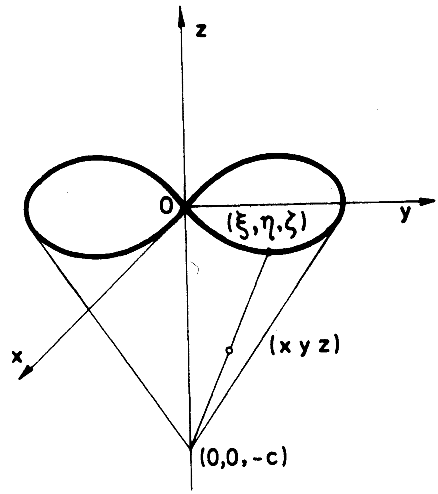
$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z+c}{\zeta+c} = \frac{1}{t}$$

(gde je (x,y,z) proizvoljna tačka na generatrisi) tj.

3) $\xi = xt$

4) $\eta = yt$

5) $\zeta = -c + (z+c)t$



Sl. 6

Iz jednačina 1),2),3),4) i 5) eliminišemo ξ,η,ζ i t pa dobijamo jednačinu konusne površi.

Iz 2) i 5) sledi da je

6) $t = \dfrac{c}{z+c}$

te je

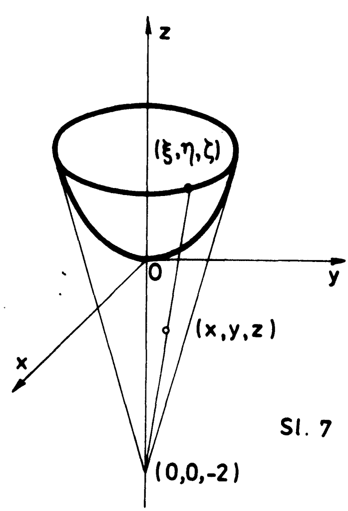
7) $\xi = \dfrac{cx}{z+c}$ i $\eta = \dfrac{cy}{z+c}$

iz 7) i 1) dobijamo jednačinu konusne površi:

$$c^2(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)(z+c)^2$$

18. Oko paraboloida $x^2+y^2=2z$ opisati konusnu površ sa temenom u tački $(0,0,-2)$.

Rešenje. Tačka (ξ,η,ζ) paraboloida će biti i tačka konusa ako tangentna ravan paraboloida u toj tački sadrži i vrh konusa $(0,0,-2)$.



Sl. 7

Iz gornjeg sledi da je

1) $\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta = 0$

Jednačina tangentne ravni u tački (ξ,η,ζ) je

$$\xi(x-\xi) + \eta(y-\eta) - (z-\zeta) = 0,$$

a kako tačka $(0,0,-2)$ leži na njoj, to je

2) $-\xi^2 - \eta^2 + 2 + \zeta = 0$.

Jednačina generatrise kroz tačke (ξ,η,ζ) i $(0,0,-2)$ je

$$\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{z+2}{\zeta+2}=\frac{1}{t},$$

gde je (x,y,z) proizvoljna tačka na generatrisi tj.

3) $\xi = xt$

4) $\eta = yt$

5) $\zeta = -2+t(z+2)$.

Sabiranjem 1) i 2) dobijamo

6) $\zeta = 2$.

Iz 5) i 6) sledi da je

$$t=\frac{4}{z+2}$$

a odavde

$$\xi=\frac{4x}{z+2} \qquad \eta=\frac{4y}{z+2} \qquad \zeta=2 .$$

Uvrstivši gornje vrednosti za ξ,η,ζ u 1) dobijamo jednačinu konusne površi

$$4(x^2+y^2)=(z+2)^2$$

§3. Krive linije na površi

Neka je površ data jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$. *Tada je prva osnovna forma* F_1 *površi odredjena sa*

$$F_1 = ds^2 = (d\vec{r}\cdot d\vec{r}) = (d\vec{r})^2 ,$$

gde je $d\vec{r} = \vec{r}_u'du + \vec{r}_v' dv$.

Može se pisati da je

$$F_1 = E\,du^2 + 2Fdudv + Gdv^2 ,$$

$$E = (\vec{r}_u')^2 , \quad F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v'), \quad G = (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v').$$

Jedinični vektor normale površi je odredjen sa

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG-F^2}} .$$

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_o) = -(d\vec{r}\cdot d\vec{n}_o) = L\,du^2 + 2Mdudv + Ndv^2 ,$$

gde je

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}'du\,dv + \vec{r}''_{vv}dv^2 .$$

Neka je K *krivina površi u tački* (u,v) *u pravcu* (du,dv), *a* $R=\frac{1}{K}$ *poluprečnik krive* c *dobivene normalnim presekom površi u tom* *pravcu. Tada je*

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2\,Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v,\frac{du}{dv}) .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K'_x = 0 \qquad \text{gde je} \qquad x = \frac{du}{dv} .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

$$\text{(a)} \quad (EG-F^2)K^2 - (EN-2FM + GL)K + (LN - M^2) = 0 .$$

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} , \quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG - F^2} .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K'_x = 0$, *to je*

$$x_1 = \left(\frac{du}{dv}\right)_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = f_2(u,v) .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K'_x \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni* *pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}, \quad x = \frac{du}{dv},$$

to je $K'_x = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje* d *tačke* $\vec{r}(u+du, v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$, *to će biti istog znaka za svako* x, *tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $\qquad Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$, *tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$, *tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$. *Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$, *tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive c_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ , *tada je* (c_1 *leži na površi)*

$$R_1 = \pm R \cos\theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* c_1, *a* R *poluprečnik krivine krive* c, *koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* c_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* c *sadrži tangentu krive* c_1 *i normalu površi. (*c *i* c_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0 \ .$$

ZADACI

1. Naći linije najvećeg nagiba površi

$$1) \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

prema ravni XOY.

<u>*Rešenje.*</u> Projekcije nivovske linije na ravan XOY površi 1) su

$$2) \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2a = 0$$

Diferencijalna jednačina od 2) je

$$\frac{x}{p} - \frac{yy'}{q} = 0$$

a diferencijalna jednačina ortogonalnih trajektorija je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{y'q} = 0 \quad \text{tj.} \quad q\,\frac{dy}{y} = -p\,\frac{dx}{x}$$

Rešenje ove jednačine je

$$3) \qquad y^q \cdot x^p = c.$$

2. Odrediti asimptotske linije površi

$$z = xy^2.$$

<u>*Rešenje.*</u> Stavljajući $x=u$ i $y=v$ gornja površ ima jednačinu

$$\vec{r} = (u, v, u\,v^2)$$

Kako je

$$\vec{r}_u{}' = (1, 0, v^2), \qquad \vec{r}_{uu}'' = (0,0,0),$$

$$\vec{r}_v{}' = (0, 1, 2uv), \qquad \vec{r}_{uv}'' = (0,0,2v),$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \qquad \vec{r}_{vv}'' = (0,0,2u).$$

$$\vec{n} = (-v^2, -2uv, 1), \qquad |\vec{n}| = \sqrt{v^4+4u^2v^2+1},$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}''du^2 + 2\vec{r}_{uv}''dudv + \vec{r}_{vv}''dv^2 = (0, 0, 2v\,du\,dv + 2u\,dv^2)$$

Diferencijalna jednačina asimptotskih linija je $F_2 = 0$ tj.

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_o = \frac{1}{|\vec{n}|}\, d^2\vec{r}\cdot\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}|}\,(2vdudv+2udv^2) = 0$$

Gornja jednačina je zadovoljena za

$$dv = 0 \text{ ili } vdu + udv = 0 \text{ tj. } \frac{du}{u} = -\frac{dv}{v}$$

čija su rešenja

$$v = C_1 \quad i \quad uv = C_2$$

Asimptotske linije na površi su

$$\vec{r}_1 = (u, C_1, uC_1^2)$$
$$\vec{r}_2 = (u, \frac{C_2}{u}, \quad u(\frac{C_2}{u})^2)$$

3. Odrediti linije krivine površi:

$$\vec{r} = (u, v, u^2+v^2).$$

Rešenje. Kako je

$$\vec{r}_u' = (1,0,2u)$$
$$\vec{r}_v' = (0,1,2v)$$
$$\vec{n} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = (-2u,-2v,1)$$
$$d\vec{r} = (du, dv, 2udu+2vdv)$$
$$d\vec{n} = (-2du,-2dv,0)$$

to iz $d\vec{r}[\vec{n}\times d\vec{n}] = 0$ imamo:

$$\begin{vmatrix} du & dv & 2udu + 2vdv \\ -2u & -2v & 1 \\ -2du & -2dv & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tj.

$$-uvdu^2 + (u^2-v^2)du\,dv + u\,v\,dv^2 = 0$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_{1/2} = \frac{-(u^2-v^2) \pm \sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}}{-2\,u\,v}$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_1 = -\frac{v}{u} \Rightarrow u^2+v^2 = C, \quad \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = \frac{u}{v} \Rightarrow u = Cv\ .$$

Linije krivine su krive

$$\vec{r}_1 = (u, \pm\sqrt{C-u^2}, C)$$
$$\vec{r}_2 = (Cv, v, C^2v^2 + v^2).$$

4. Naći ugao pod kojim se seku koordinatne krive površi:

$$\vec{r} = (a\cos u \sin v, a \sin u \sin v, a\cos v).$$

Rešenje. Ako obeležimo sa ϕ ugao izmedju koordinatnih krivih, tada je

$$\cos\phi = \frac{(\vec{r}_u{}' \cdot \vec{r}_v{}')}{|\vec{r}_u{}'| \cdot |\vec{r}_v{}'|}.$$

Za datu površ je

$$\vec{r}_u{}' = (-a\sin u \sin v, a\cos u \sin v, 0),$$
$$\vec{r}_v{}' = (a\cos u \cos v, a\sin u \cos v, -a\sin v).$$

Kako je $\vec{r}_u{}' \cdot \vec{r}_v{}' = 0$ to su koordinatne krive ove površi u svakoj tački normalne.

5. Odrediti linije krivine površi:

$$\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, a v).$$

Rešenje. Za ovu površ je

$$\vec{r}_u{}' = (\cos v, \sin v, 0)$$
$$\vec{r}_v{}' = (-u\sin v, u\cos v, a),$$
$$\vec{n}_o = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v, -a\cos v, u)$$
$$\vec{n}_{o_u}{}' = \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)^3}}(-a u\sin v, a u\cos v, a^2)$$
$$\vec{n}_{o_v}{}' = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\cos v, a\sin v, 0)$$

$$d\vec{n}_o = \vec{n}'_{o_u} du + \vec{n}'_{o_v} dv =$$

$$= \frac{1}{(a^2+u^2)^{3/2}} (-ausinvdu+a(a^2+u^2)cosvdv, aucosvdu+a(a^2+u^2)sinvdv, a^2du)$$

$$d\vec{r} = \vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv =$$

$$=(cosvdu-usinvdv, sinvdu+ucosvdv, adv)$$

Ako za diferencijalnu jednačinu linija krivina uzmemo $d\vec{n}_o = \lambda d\vec{r}$, tada je

$$\frac{-ausinvdu+a(a^2+u^2)cosvdv}{cosvdu - usinvdv} = \frac{aucosvdu+a(a^2+u^2)sinvdv}{sinvdu + ucosvdv} = \frac{a^2du}{a\,dv}$$

Izjednačavanjem bilo koja dva razlomka gornje jednačine dobijamo diferencijalnu jednačinu oblika

$$(a^2+u^2)dv^2 = du^2 \quad \text{tj.} \quad dv = \pm \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}},$$

čije je rešenje: $v = \pm \ln(u + \sqrt{a^2+u^2}) + C$.

6. Odrediti krive koje polove uglove izmedju koordinatnih krivih na površi i linije najvećeg nagiba, ako je jednačina površi:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+v).$$

Rešenje. Ako sa $\vec{r}'_{uo}$ i $\vec{r}'_{vo}$ obeležimo jedinične tangentne vektore na koordinatne krive, a sa $d\vec{r}$ tangentni vektor tražene krive, tada je

ili $(d\vec{r}\cdot\vec{r}'_{uo}) = (d\vec{r}\cdot\vec{r}'_{vo})$,

ili $(d\vec{r}\cdot\vec{r}'_{uo}) = -(d\vec{r}\cdot\vec{r}'_{vo})$,

ili zajedno: (a) $(d\vec{r}\cdot\vec{r}'_{uo}) = \pm(d\vec{r}\cdot\vec{r}'_{vo})$

diferencijalna jednačina traženih krivih.

Imamo:

$$\vec{r}'_u = (\cos v, \sin v, 1)$$

$$\vec{r}'_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$

$$\vec{r}\,'_{uo} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{r}\,'_u, \quad \vec{r}\,'_{vo} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,\vec{r}\,'_v$$

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u du + \vec{r}\,'_v dv =$$

$$=(\cos v\, du - u \sin v dv, \sin v\, du + u\cos v\, dv, du + dv)$$

a (a) postaje

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\cos^2 v du - u \sin v \cos v\, dv + \sin^2 v du + u \sin v \cos v dv +$$
$$+ du + dv) =$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,(-u \cos v \sin v du + u^2 \sin^2 v dv + u \sin v \cos v\, du +$$
$$+ u^2 \cos^2 v\, dv + du + dv).$$

Odavde je

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(2du+dv) = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,\left[du+(u^2+1)dv\right]$$

$$(\sqrt{2} \mp \frac{1}{\sqrt{u^2+1}})du = (\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{\sqrt{2}})dv$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{2}}$$

čije je rešenje

$$v_{1/2} = C \pm \sqrt{2}\,\ln(u+\sqrt{u^2+1})$$

a tražene krive imaju oblik

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(u,v_1)$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}(u,v_2)$$

Linije najvećeg nagiba su normalne na nivovske linije $z=u+v=C$, čija je jednačina

$$\vec{r}_3 = ((C-v)\cos v\,, (C-v)\sin v\,, C)$$

Diferencijalna jednačina nivovskih linija je $d\vec{r}_{(u+v=C)} \cdot (\vec{r}_3)'_v = 0$

Kako je

$$(\vec{r}_3)'_v = (-\cos v - (C-v)\sin v, -\sin v + (C-v)\cos v\,, 0)$$

$$(d\vec{r})_{(u+v=C)} = (\cos v\, du - (C-v)\sin v dv, \sin v du + (C-v)\cos v dv, du+dv)$$

to je

$$(\vec{r}_3)'_v \cdot (d\vec{r})_{(u+v=C)} = -\cos^2 v du + (C-v)\sin v - \cos v dv -$$

$$-(C-v)\sin v \cos v\, du + (C-v)^2 \sin^2 v dv - \sin^2 v du -$$

$$-(C-v)\sin v \cos v\, dv + (C-v)\cos v \sin v\, du +$$

$$+ (C-v)^2 \cos^2 v\, dv = 0$$

$$-du + (C-v)^2 dv = 0 \Longrightarrow$$

$$u = C^2 v - Cv^2 + \frac{v^3}{3} + C_1 = f(v)$$

i jednačina nivovskih linija je

$$\vec{r} = (f(v)\cos v\,, f(v)\sin v\,, f(v) + v)\,.$$

7. Naći glavne pravce, glavne krivine, srednju i Gaussovu krivinu u proizvoljnoj tački površi

$$\vec{r} = (u,v,uv)$$

Rešenje. Kako je

$$\frac{1}{R} = K = \frac{d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_o}{(d\vec{r})^2}$$

to iz

$$\vec{r}'_u = (1,0,v)$$
$$\vec{r}'_v = (0,1,u)$$
$$\vec{r}''_{uu} = (0,0,0)$$
$$\vec{r}'_{vu} = (0,0,1)$$
$$\vec{r}'_{uv} = (0,0,1)$$
$$\vec{r}''_{vv} = (0,0,0)$$

Imamo

$$\vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = (-v,-u,1)\,,$$

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}(-v,-u,1)\,,$$

$$d\vec{r} = \vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv = (du,0,vdu) + (0,dv,udv) = (du,dv,vdu+udv)\,,$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu}(du)^2 + \vec{r}''_{vu} dudv + \vec{r}''_{uv} dudv + \vec{r}''_{vv}(dv)^2 = (0,0,2\,du\,dv)$$

Odavde je

$$\frac{1}{R} = K = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \quad \frac{2\,du\,dv}{(du^2+dv^2+v^2du^2+2uvdudv+u^2dv^2)}\,.$$

Podelimo i broitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 $(dv \neq 0)$ i obeležimo $\frac{du}{dv} = x$, tada je

$$\frac{1}{R} = K = \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \cdot \frac{x}{(1+v^2)x^2+2uvx+(1+u^2)}\,.$$

Glavni pravci se dobijaju za ono $\frac{du}{dv} = x$ za koje je $\frac{1}{R}$ maksimalno ili minimalno, tj. za koje je $\left(\frac{1}{R}\right)'_x = 0$. Dobijamo

$$\left(\frac{1}{R}\right)'_x = K'_x = \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \cdot \frac{-(1+v^2)x^2+1+u^2}{[(1+v^2)x^2+2uvx+(1+u^2)]^2}$$

Glavni pravci se dobijaju za

$$x^2 = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{1+u^2}{1+v^2}$$

tj.

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \quad \text{i} \quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

čija su rešenja

$$u+\sqrt{1+u^2} = C_1\,(v+\sqrt{1+v^2}), \quad u+\sqrt{1+u^2} = \frac{C_2}{v+\sqrt{1+v^2}}\,.$$

Za $x_1 = \sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}}$ dobijamo

$$\frac{1}{R_1} = K_1 = \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}}}{(1+v^2)\frac{1+u^2}{1+v^2} + 2uv\sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}} + 1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+u^2}\,\sqrt{1+v^2}+uv)}\,.$$

Slično za $x_2 = -\sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2}}$ dobijamo:

$$\frac{1}{R_2} = K_2 = \frac{-1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+u^2}\,\sqrt{1+v^2} - uv)}\ .$$

Odavde se lako dobija da je srednja krivina

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{-uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

a Gaussova krivina

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{-1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

8. Odrediti asimptotske linije, linije najvećeg nagiba geodezijske linije površi

$$\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{u}).$$

Rešenje. Za ovu površ je

$$\vec{r}_u{}' = (\cos v,\ \sin u,- \frac{1}{u^2})$$

$$\vec{r}_v{}' = (-u\sin v,\ u\cos v, 0)$$

$$\vec{r}\,''_{uu} = (0, 0,\ \frac{2}{u^3})$$

$$\vec{r}\,''_{uv} = (-\sin v,\ \cos v, 0)$$

$$\vec{r}\,''_{vv} = (-u\cos v,\ -u\sin v, 0)$$

$$\vec{n} = [\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'] = (\frac{1}{u}\cos v,\ \frac{1}{u}\sin v, u)$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_u{}'du + \vec{r}_v{}'dv = (\cos v\,du - u\sin v\,dv,\ \sin v\,du + u\cos v\,dv,\ - \frac{du}{u^2})$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}\,''_{uu}du^2 + 2\,\vec{r}\,''_{uv}du\,dv + \vec{r}\,''_{vv}dv^2 =$$

$$= -2\sin v\,du\,dv - u\cos v\,dv^2, 2\cos v\,du\,dv - u\sin v\,dv^2, \frac{2}{u^3}du^2)$$

Jednačinu asimptotskih linija možemo pisati u obliku

$$F_2 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_o = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n} = 0\ ,$$

što za ovu površ postaje

$$- \frac{2}{u} \sin v \cos v \, du \, dv - \cos^2 v \, dv^2 + \frac{2}{u} \sin v \cos v \, du \, dv - \sin^2 v \, dv^2 +$$

$$+ \frac{2}{u^2} \; du^2 = 0,$$

$$\frac{2}{u^2} du^2 = dv^2 \Rightarrow \sqrt{2} \frac{du}{u} = \pm dv$$

čije je rešenje

$$\sqrt{2} \ln u = C \pm v, \qquad u_{1/2} = e^{\frac{c \pm v}{\sqrt{2}}}$$

Asimptotske linije su

$$\vec{r}_1 = (e^{\frac{v+c}{\sqrt{2}}} \cos v, e^{\frac{v+c}{\sqrt{2}}} \sin v, e^{\frac{-v-c}{\sqrt{2}}})$$

$$\vec{r}_2 = (e^{\frac{c-v}{\sqrt{2}}} \cos v, e^{\frac{c-v}{\sqrt{2}}} \sin v, e^{\frac{-c+v}{\sqrt{2}}})$$

Linija najvećeg nagiba je normalna na nivovsku liniju za koju je $z = \frac{1}{u} = \frac{1}{C}$, tj. na krivu

$$\vec{r}_3 = (C \cos v, C \sin v, C)$$

tj.

$$d\vec{r}_{(u=C)} \cdot d\vec{r}_3 = 0$$

Kako je

$$d\vec{r}_{(u=C)} = (\cos v \, du - C \sin v \, dv, \sin v \, du + C \cos v \, dv, - \frac{du}{C^2})$$

$$d\vec{r}_3 = (-C \sin v \, dv, C \cos v \, dv, 0)$$

to je diferencijalna jednačina linije najvećeg nagiba:

$$-C \sin v \cos v \, du \, dv + C^2 \sin^2 v \, dv^2 + C \cos v \sin v \, du \, dv +$$

$$+ C^2 \cos^2 v \, dv^2 = 0,$$

tj.

$$C^2 \, dv^2 = 0$$

čije je rešenje v=k. Linije najvećeg nagiba imaju jednačinu

$$\vec{r} = (u \cos k, u \sin k, \frac{1}{u})$$

Projekcije linija krivina na ravan XOY su prave $y = x \, \mathrm{tg} \, k$, tj. prave kroz koordinatni početak, što se već moglo naslutiti iz jednačine površi date u obliku

$$z^2 = \frac{1}{x^2+y^2} .$$

Iz jednačine geodezijske linije date u obliku

$$\vec{n}\cdot[d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

sledi da je njena diferencijalna jednačina oblika

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{u}\cos v & \frac{1}{u}\sin v & u \\ \cos v\,du - u\sin v\,dv & \sin v\,du + u\cos v\,dv & -\frac{du}{u^2} \\ -2\sin v\,du\,dv - u\cos v\,dv^2 & 2\cos v\,du\,dv - u\sin v\,dv^2 & \frac{2}{u^3}\,du^2 \end{vmatrix} = 0$$

što se svodi na

$$\left(-\frac{4}{u^3} + 2u\right)du^2 dv + u^3 dv^3 = 0$$

Ova diferencijalna jednačina se raspada na dve

$$dv = 0 \quad \text{i} \quad dv^2 = \frac{4+2u^4}{u^6}\,du^2$$

Rešenje prve je v=k, što znači da su linije najvećeg nagiba istovremeno i geodezijske linije ove površi, dok drugu možemo pisati u obliku:

$$dv = \pm \frac{\sqrt{4+2u^4}}{u^3}\,du$$

Smenom $u^2=t$ dobijamo

$$v = \pm \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{4+2t^2}}{t^2}\,dt.$$

9. Naći linije krivine površi

1) $z = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax \cos ay)$.

Rešenje. Normala površi je

$$\vec{n} = (-z_x', -z_y', 1) = (-\mathrm{tg}\, ax, -\mathrm{tg}\, ay, 1).$$

Odavde je

$$d\vec{n} = \left(-\frac{a\,dx}{\cos^2 ax}, -\frac{a\,dy}{\cos^2 ay}, 0\right)$$

Tangentni vektor na površ u pravcu (dx,dy) je

$$d\vec{r} = (dx,dy,z_x'dx+z_y'dy) = (dx,dy,\text{tg}\,ax\,dx+\text{tg}\,ay\,dy) \ .$$

Ako za diferencijalnu jednačinu linije krive uzmemo $d\vec{r}\cdot[\vec{n}\times d\vec{n}]=0$ tada je

$$\begin{vmatrix} dx & dy & \text{tg}\,ax\,dx+\text{tg}\,ay\,dy \\ -\text{tg}\,ax & -\text{tg}\,ay & 1 \\ \dfrac{-a\,dx}{\cos^2 ax} & \dfrac{-ady}{\cos^2 ay} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tj.

$$\frac{a\,\text{tg}\,ax\,\text{tg}\,ay}{\cos^2 ay}(dy)^2 - \frac{a\,\text{tg}\,ax\,\text{tg}\,ay}{\cos^2 ax}(dx)^2 = 0.$$

Odavde je

$$\frac{dy}{\cos ay} = \pm\frac{dx}{\cos ax},$$

čija su rešenje

$$\ln \text{tg}\,\frac{\pi-2ay}{4} = \pm \ln \text{tg}\,\frac{\pi-2ax}{4} + \ln C$$

tj.

$$2)\qquad \text{tg}\,\frac{\pi-2ay}{4}\cdot \text{tg}\,\frac{\pi-2ax}{4} = C$$

$$3)\qquad \text{tg}\,\frac{\pi-2ay}{4} = C\,\text{tg}\,\frac{\pi-2ax}{4}$$

Presek površi 1) i familije cilindra 2) daje jednu familiju linija krivina površi, a presek 1) i 3) daje drugu familiju.

10. Naći geodezijske linije centralne sfere poluprečnika a.

Rešenje. Jednačinu centralne sfere možemo, pisati u obliku

$$\vec{r} = (a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v)$$

Kako je

$$\vec{r}_u' = (-a\cos v\sin u, a\cos v\cos u, 0)$$

$$\vec{r}_v' = (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \cos v),$$

to je

$$\vec{n} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' =$$

$$(a^2\cos^2 v \cos u, a^2\cos^2 v \sin u, a^2 \sin v \cos v)$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv =$$

$$(-a \cos v \sin u\, du - a \sin v \cos u\, dv, a \cos v \cos u\, du -$$

$$-a \sin v \sin u \quad , a \cos v\, dv)$$

Nadalje je

$$\vec{r}''_{uu} = (-a \cos v \cos u, -a \cos v \sin u, 0)$$

$$\vec{r}''_{uv} = (a \sin v \sin u, -a \sin v \cos u, 0)$$

$$\vec{r}''_{vv} = (-a \cos v \cos u, -a \cos v \sin u, -a \sin v)$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu} du^2 + 2\vec{r}''_{uv} du\, dv + \vec{r}''_{vv} dv^2 = (A, B, C)$$

gde je

$$A = -a \cos v \cos u\, du^2 + 2a \sin v \sin u\, du\, dv - a \cos v \cos u dv^2$$

$$B = -a \cos v \sin u\, du^2 - 2a \sin v \cos u du\, dv - a \cos v \sin u\, dv^2$$

$$C = -a \sin v\, dv^2$$

Diferencijalna jednačina geodezijske linije je $\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$, što izračunavanjem vrednosti odgovarajuće determinante postaje

$$a^4 \sin v \cos v\, du [2\, dv^2 + \cos^2 v\, du^2] = 0$$

Stavljajući $du=0$ dobijamo geodezijske linije $u=C$, uporednike sfere. Stavljajući $\sin v = 0$ dobijamo meridijan $\vec{r} = (a \cos u, a \sin u, 0$ dok $\cos v = 0$ ne daje liniju na sferi. Rešenje diferencijalne jednačine

$$2\, dv^2 + \cos^2 v\, du^2 = 0$$

tj.

$$\frac{dv}{\cos v} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\, du$$

je

$$\ln C + \ln \left| tg\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \pm \frac{iu}{\sqrt{2}} \qquad \text{tj.} \qquad C tg\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\pm \frac{iu}{\sqrt{2}}}$$

ZADACI ZA VEŽBU

1. Naći tangentnu ravan na površ $x^n+y^n+z^n=a^n$ u tački (x_1,y_1,z_1)

$$(x_1^{n-1} \cdot x+y_1^{n-1}y + z_1^{n-1}z = a^n)$$

2. Naći jednačinu tangentne ravni na površ $x=u\cos v, y = u\sin v, z = av$.

$$\left[x \sin v-y \cos v+ \frac{u}{a} z = u v \right].$$

3. Naći tačke na elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ u kojima normalna obrazuje ugao α sa x osom.

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{x^2}{a^4} \operatorname{tg}^2\alpha \right]$$

4. Dokazati da površ $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=2xyz$ seče sferu $x^2+y^2+z^2=1$ po četiri kruga.

5. Naći obvojnicu u kojima otsečci a,b,c, na osama zadovoljavaju uslov $a^n+b^n+c^n=1$.

$$(x^\sigma+y^\sigma+z^\sigma = c^\sigma; \quad (n+1)\sigma = n)$$

6. Naći obvojnicu ravni koje tangiraju parabole $y^2=2x$, $z=0$; $y^2=2z$, $x=0$.

$$(y^2=2(x+z)).$$

7. Naći linije krivine na hiperboličnom paraboloidu $z = \frac{xy}{a}$

$$\left[\text{u preseku površi} \quad z= \frac{xy}{a} \quad \text{i} \quad (x+\sqrt{a^2+x^2})(y \pm\sqrt{a^2+y^2}) = C\right]$$

8. Naći linije najvećeg nagiba na površi $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

$$(\text{u preseku površi } ax^2 + by^2 + cz^2=1, \ y = Cx^{b/a})$$